

SKRIVTID: 8-13,

HJÄLPMEDEL: *Beta* (eller *Phys. HandBook*), formelsamling, miniräknare.**MOTIVERA** alla lösningar noggrant.

POÄNGGRÄNSER: 3 18–24p, 4 25–31p, 5 32–40p. Varje uppgift är värd 8p

1. Använd Laplacetransformen för att bestämma  $y$  sådan att  $y(0) = 1$  samt  $y'(t) - 6y(t) + 3 + 10 \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau) d\tau = 0$ ,  $t > 0$ .

**LÖSNING**

Vi Laplacetransformerar och utnyttjar att integralen är faltningen mellan  $\cos(t)$  och  $y(t)$ .

$$s Y(s) - 1 - 6 Y(s) + \frac{3}{s} + \frac{10 s Y(s)}{s^2 + 1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 - 3s + 2)}$$

Högerledet partialbråksuppdelat:

$$\frac{1}{2s} - \frac{2}{s-1} + \frac{5}{2(s-2)}$$

Efter inverstransformering får man

$$\frac{1}{2} - 2e^t + \frac{5e^{2t}}{2}, \quad t > 0$$

2. (a) Avgör om differensekvationen

$$y(n+2) + \frac{1}{4}y(n) - y(n+1) = u(n), \quad n \geq 0 \text{ är stabil.}$$

- (b) Lös ovanstående ekvation då  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 2$  och  $u(n) = 1$ .

**LÖSNING**

- (a) Enligt känd sats råder stabilitet om polerna till överföringsfunktionen  $H(z)$  ligger i enhetsskivan  $|z| < 1$ .

Z-transformering av

$$h(n+2) + \frac{1}{4}h(n) - h(n+1) = \delta(n) \text{ där } h(0) = h(1) = 0$$

ger

$$z^2 H(z) + \frac{H(z)}{4} - z H(z) = 1$$

$$H(z) = \frac{4}{(2z-1)^2}$$

Som synes har överföringsfunktionen dubbelpolen  $z = \frac{1}{2}$ . Den ligger inuti enhetsskivan. Därmed råder stabilitet.

- (b) Först beräknar vi några inledande värden. Kan vara bra att ha för att kontrollera vår lösning så småningom ...

|        |   |   |                |                |
|--------|---|---|----------------|----------------|
| $n$    | 0 | 1 | 2              | 3              |
| $y(n)$ | 1 | 2 | $\frac{11}{4}$ | $\frac{13}{4}$ |

Z-transformering av  $y(n+2) + \frac{1}{4}y(n) - y(n+1) = 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 2$  resulterar i

$$z^2 Y(z) + \frac{Y(z)}{4} - Y(z)z = \frac{z}{z-1} + z^2 + 2z - z$$

$$Y(z) = \frac{4z^3}{(z-1)(2z-1)^2}$$

Vi gör en smart partialbråksuppdelning

$$Y(z) = z \left( \frac{4}{z-1} - \frac{3}{z-\frac{1}{2}} - \frac{2}{(2z-1)^2} \right).$$

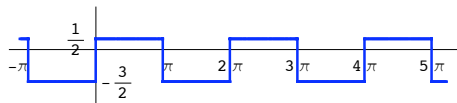
Inverstransformering med hjälp av tabell ger nu  $y(n) = 4 - 3 \cdot 2^{-n} - 2^{-n} n$

Till sist kontrollerar vi vår lösning mot de inledningsvis beräknade värdena:

| $n$                              | 0 | 1 | 2              | 3              |
|----------------------------------|---|---|----------------|----------------|
| $-2^{-n} n - 3 \cdot 2^{-n} + 4$ | 1 | 2 | $\frac{11}{4}$ | $\frac{13}{4}$ |

3. (a) Konvergerar Fourierserien i origo för den  $2\pi$ -periodiska funktionen i figuren? Mot vad i så fall?

(b) Bestäm Fourierkoefficienterna och Fourierserien för fältningen mellan  $\sum_{22 \leq |n| \leq 24} e^{i n t}$  och den  $2\pi$ -periodiska funktionen i figuren.



## LÖSNING

(a) Figurens funktion har vänster och högerderivator i origo. Därför konvergerar dess Fourierserie – enligt Dirichlets konvergenssats – mot medelvärdet  $\frac{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$ .

(b) Enligt faltungsformeln gäller  $c_n(f * g) = c_n(f) \cdot c_n(g)$ . I vårt fall är  $f(t)$  lika med  $\sum_{22 \leq |n| \leq 24} e^{i n t}$  och  $g$  är den  $2\pi$ -periodiska funktionen i figuren.

$f$  som är en ändlig  $2\pi$ -periodisk Fourierserie har Fourierkoefficienterna

$$c_n(f) = \begin{cases} 1 & \text{då } |n| = 22, 23, 24 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

$g$ :s Fourierkoefficienter då?

De kan beräknas med hjälp av integralformeln (Notera att  $g$  inte är udda!)

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-i n t} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -\frac{3}{2} e^{-i n t} dt + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} e^{-i n t} dt \right) \stackrel{n \neq 0}{=} \frac{i((-1)^n - 1)}{n\pi} = \begin{cases} -\frac{2i}{n\pi}, & n \text{ udda} \\ 0, & n \text{ jämn och nollskild} \end{cases}$$

Alternativt kan de beräknas genom omskalning och vertikal translation av formelsamlingens fyrkantssignal och dess Fourierserie.

Om formelsamlingens funktion kallas  $g_1(t)$  så är  $g(t) = -\frac{1}{2} + g_1\left(\frac{t}{2}\right)$ .

Därmed blir  $g$ :s Fourierserie lika med  $-\frac{1}{2} + \sum_{n \text{ udda}} -\frac{2i}{n\pi} e^{i n t}$ .

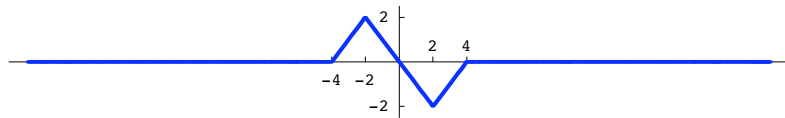
Det följer att  $c_n(g) = 0$  då  $n \in \{22, 24\}$ ,  $c_{23}(g) = -\frac{2i}{23\pi}$ ,  $c_{-23}(g) = \frac{2i}{23\pi}$ .

$$\text{Alltså, } c_n(f * g) = \begin{cases} -\frac{2i}{23\pi} & \text{då } n = 23 \\ \frac{2i}{23\pi} & \text{då } n = -23 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Härav,

$$\sum_n c_n(f * g) e^{i n t} = -\frac{2i}{23\pi} e^{23 i t} + \frac{2i}{23\pi} e^{-23 i t} = -\frac{2i}{23\pi} (e^{23 i t} - e^{-23 i t}) = \frac{4}{23\pi} \sin(23 t).$$

## 4. Fouriertransformera nedanstående funktion



(a) med hjälp av transformparet  $\Lambda(t) \sim \left( \frac{\sin(\frac{w}{2})}{\frac{w}{2}} \right)^2$ ,

(b) med hjälp av Fouriertransformens definition.

LEDNING till (a): Funktionen är en linjärkombination av två translaterade omskalade versioner av  $\Lambda(t)$ .

## LÖSNING

Låt oss kalla den givna funktionen för  $f$ .

(a) Det är tydligt att  $f(t)$  är en linjärkombination av två omskalade och translaterade versioner av  $\Lambda(t)$ . Närmare bestämt är

$$f(t) = 2 \cdot \Lambda\left(\frac{1}{2}(t+2)\right) - 2 \cdot \Lambda\left(\frac{1}{2}(t-2)\right)$$

Det följer att

$$\begin{aligned} f(t) &\sim 2 \cdot 2 e^{i 2 w} \left( \frac{\sin(w)}{w} \right)^2 - 2 \cdot 2 e^{-i 2 w} \left( \frac{\sin(w)}{w} \right)^2 \\ &= 4 (e^{i 2 w} - e^{-i 2 w}) \left( \frac{\sin(w)}{w} \right)^2 = 8 i \sin(2 w) \left( \frac{\sin(w)}{w} \right)^2. \end{aligned}$$

Man konstaterar att transformen blev en udda imaginär funktion, vilket var förväntat eftersom signalen  $f$  är en udda reell funktion.

$$\begin{aligned} (b) f(t) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt \stackrel{?}{=} -2 i \int_0^{\infty} f(t) \sin(w t) dt \\ &= -2 i \left( \int_0^2 (-t) \sin(w t) dt + \int_2^4 (t-4) \sin(w t) dt \right) \\ &= -2 i \left( \frac{2 w \cos(2 w) - \sin(2 w)}{w^2} + \frac{-2 w \cos(2 w) - \sin(2 w) + \sin(4 w)}{w^2} \right) \\ &= -2 i \frac{\sin(4 w) - 2 \sin(2 w)}{w^2} \end{aligned}$$

☞ Tänk på att  $f(t) e^{-i w t} = f(t) \cos(w t) - i f(t) \sin(w t)$  och att  $f(t) \cos(w t)$  är jämn medan  $f(t) \sin(w t)$  är udda eftersom  $f(t)$  är jämn.

$$\begin{aligned} \text{Kontroll: } -2 \frac{\sin(4 w) - 2 \sin(2 w)}{w^2} &= -2 \frac{2 \cos(2 w) \sin(2 w) - 2 \sin(2 w)}{w^2} = \\ -4 \frac{\sin(2 w) (\cos(2 w) - 1)}{w^2} &= -4 \frac{\sin(2 w) (-2 \sin^2(w))}{w^2} = 8 \sin(2 w) \left( \frac{\sin(w)}{w} \right)^2. \end{aligned}$$

5. Lös följande värmeledningsproblem för en cirkulär tråd. Bestäm också gränsvärdet av  $u(x, t)$  då  $t \rightarrow \infty$ .

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad -\pi < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 20 + |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

## LÖSNING

Låt oss söka en Fourierserielösning i rumsriktningen med tidsberoende koefficienter. Dvs

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{i n x} \quad (1)$$

Om (1) pluggas in i värmeledningsekvationen följer

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{i n x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{i n x}$$

Efter derivering termvis fås

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(t) e^{i n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(t) e^{i n x}$$

Identifieras koefficienterna erhålls  $c_n'(t) = -n^2 c_n(t)$  och därmed

$$c_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$$

Således har vi nu  $u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-n^2 t} e^{i n x}$  där  $C_n$  bestäms av

$$20 + |x| = u(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n x}$$

Denna likhet informerar oss om att  $C_n$  är begynnelsestemperaturens Fourierkoefficienter. Det följer att

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (20 + |\xi|) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (20 + \xi) d\xi = 20 + \frac{\pi}{2}$$